Понятие числовой последовательности

Определение: $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ - множество занумерованных вещественных чисел - *числовая последовательность.*

Определение: $\{x_n\}$ - *ограничена*, если $\exists M : \forall n \in \mathbb{N} \ \ |x_n| \leqslant M$.
$\{x_n\}$ - *не ограничена*, если для $\forall M \ \ \exists n(M) \in \mathbb{N} \ : \ |x_{n(M)}| > M$.

Определение: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \iff \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N(\varepsilon) \ : \ \forall n \geqslant N(\varepsilon) \ \ |x_n - a| < \varepsilon$.

Определение: $\{x_n\}$ - *бесконечно малая*, если

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \iff \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N(\varepsilon) \ : \ \forall n \geqslant N(\varepsilon) \ \ |x_n| < \varepsilon.$$

Определение: $\{x_n\}$ - *бесконечно большая*, если:

1) $\{x_n\}$ - знакопостоянна

2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, то есть

$$x_n > 0 \ \ (x_n < 0) \ \text{ для } \forall n \in \mathbb{N} \ \text{ и } \ \text{для } \forall E > 0 \ \ \exists N(E): \ \text{ при } \ \forall n \geqslant N(E) \ \ |x_n| > E.$$

Замечание: Знакопостоянство бесконечно большой последовательности иногда не требуется.

Утверждение: Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$, тогда

1) $\exists \lim\limits_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = x \pm y$;

2) $\exists \lim\limits_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = x \cdot y$;

3) $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{x}{y} \quad (y_n \neq 0 \ \text{ для } \ \forall n, \ \ y \neq 0)$.

Утверждение: Если $\exists N : \ \forall n \geqslant N$ выполнено $x_n \leqslant y_n$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} y_n$ (если данные пределы существуют).

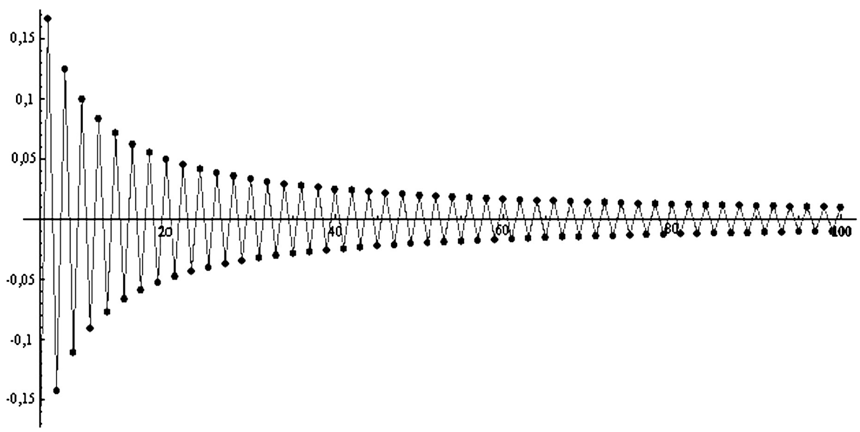
3.1. *(42)* Докажите, что последовательность $\{x_n\}$ есть бесконечно малая, указав для $\forall \varepsilon > 0$ число $N(\varepsilon)$, что для $\forall n \geqslant N(\varepsilon)$ выполнено $|x_n| < \varepsilon$, если:

(а) • $x_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$;

(б) • $x_n = \dfrac{2n}{n^3+1}$;

(в) $x_n = \dfrac{1}{n!}$;

(г) $x_n = (-1)^n \cdot 0,999^n$.



3.2. Приведите пример бесконечно малой последовательности $\{x_n\}$, члены которой:

(а) • поочередно, то приближаются к своему пределу, то удаляются от него;

(б) поочередно, то принимают значение равное своему пределу, то удаляются от него.

Помещённые выше примеры бесконечно малых последовательностей интересны тем, что они охватывают различные способы стремления переменной к нулю. При этом ***несущественно****, лежат ли значения последовательности с одной стороны* **(№3.1 б,в)** *от предела или нет* **(№3.1 а,г)***;* ***несущественно****, приближается ли она с каждым шагом к своему пределу* **(№3.1)** *или нет* **(№3.2)***;* ***несущественно*** *наконец, достигает ли последовательность своего предела, т.е. принимает ли значения равные ему* **(№3.2 б)***.* ***Существенно*** *лишь то, о чем говорится в определении:* ***последовательность должна отличаться от предела сколь угодно мало для достаточно больших своих номеров****.*

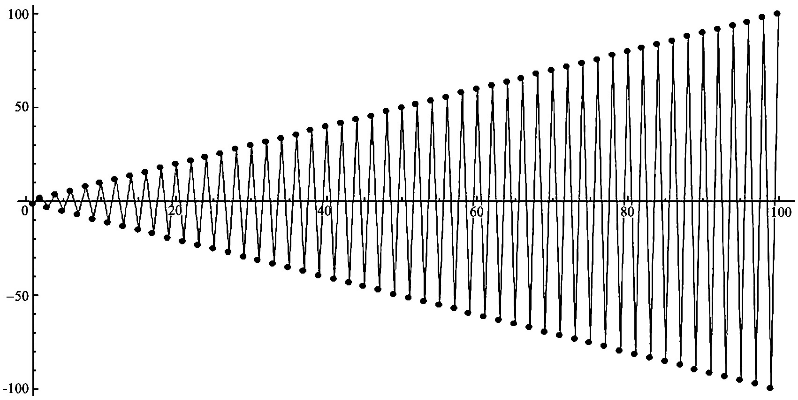
3.3. *(43)* Докажите, что $\{x_n\}$ есть бесконечно большая, возможно незнакопостоянная, определив для $\forall E > 0$ число $N(E) : |x_n| > E$ при $n \geqslant N(E)$, если:

(а) • $x_n = (-1)^n \cdot n$;

(б) $x_n = 2^{\sqrt{n}}$;

(в) $x_n = \lg(\lg n) \quad (n \geqslant 2)$;

(г) $x_n = \dfrac{3^n - 2^n}{2^n + 1}$.



3.4. *(41)* • Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$, определив для $\forall \varepsilon > 0$ число $N(\varepsilon) : |x_n - 1| < \varepsilon$ при всех $n \geqslant N$.

3.5. *(45)* Сформулируйте с помощью кванторов и неравенств следующие утверждения:

(а) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$; *(б)* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

3.6. • Приведите пример неограниченной последовательности $\{x_n\}$, у которой есть ограниченная подпоследовательность.

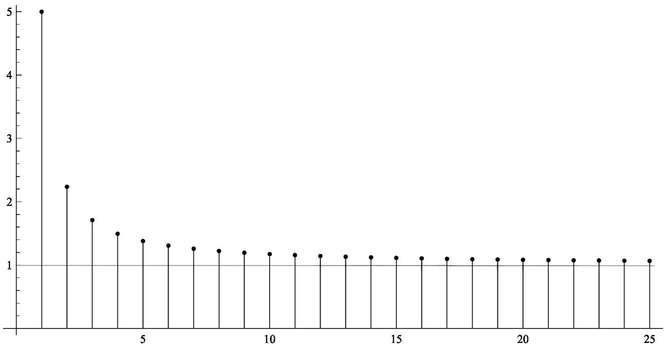
Замечание: Отметим, что построенная **неограниченная последовательность не является бесконечно большой,** т.е. данные понятия существенно разные.

3.7. Докажите, по определению, что:

(а) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1, \quad (a > 1);$

(б) • $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0, \quad (|q| < 1).$

(в) $\lim\limits_{n\to\infty} Q^n = \infty, \quad (|Q| > 1).$



$x_n = \sqrt[n]{5}$

3.8. • Рассмотрим *бесконечно убывающую геометрическую прогрессию:*

$$a,\ aq,\ aq^2,\ \ldots,aq^n,\ \ldots \quad (|q| < 1)$$

Под ее суммой понимается предел, к которому стремится сумма S_n ее n членов при $n \to \infty$. Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

3.9. Приведите пример последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, таких, что $\{x_n\} > \{y_n\}$ для $\forall n \in \mathbb{N}$, но $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

3.10. *(46-57)* Найдите следующие пределы:

(а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{10000n}{n^2+1};$

(б) • $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right);$

(в) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^2}\sin n!}{n+1};$

(г) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}};$

(д) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+a+a^2+\ldots+a^n}{1+b+b^2+\ldots+b^n},\ |a| < 1,\ |b| < 1;$

(е) • $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2}{n^2} + \ldots + \dfrac{n-1}{n^2}\right);$

(ж) $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{1}{n} - \dfrac{2}{n} + \dfrac{3}{n} - \ldots + \dfrac{(-1)^{n-1}n}{n}\right|;$

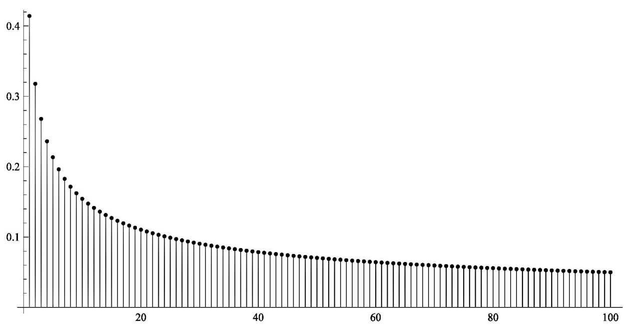
(з) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1^2}{n^3} + \dfrac{2^2}{n^3} + \ldots + \dfrac{(n-1)^2}{n^3}\right);$

(и) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1^2}{n^3} + \dfrac{3^2}{n^3} + \ldots + \dfrac{(2n-1)^2}{n^3}\right);$

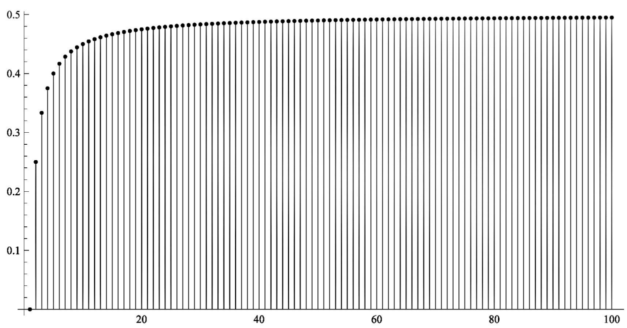
(к) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2^2} + \dfrac{5}{2^3} \ldots + \dfrac{2n-1}{2^n}\right);$

(л) • $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)}\right);$

(м) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\ldots\cdot\sqrt[2^n]{2}\right).$



$x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$



$x_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \ldots + \frac{n-1}{n^2}$

3.11. Найдите предел

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}\right).$$

3.12. Пусть заданы два числа a и b. Положим $x_1 = a,\ x_2 = b,\ x_n = \dfrac{x_{n-1}+x_{n-2}}{2}$ $(n \geqslant 3)$. Найдите предел последовательности $\{x_n\}$.

3.13. $\star$ Докажите, что последовательность $\{x_n\} = 1 + 17n^2$ содержит бесконечно много квадратов целых чисел.

3.14. $\star$ Определим последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ при помощи условий:

$$x_n = x_{n-1} + 2y_{n-1}\sin^2\alpha,\ \ y_n = y_{n-1} + 2x_{n-1}\cos^2\alpha,\ \ x_0 = 0,\ \ y_0 = \cos\alpha.$$

Найдите выражение для x_n и y_n через n и α.

3.15. $\star$ Найдите формулу общего члена для последовательности:

(а) $x_1 = 1,\ x_2 = 1,\ \ x_n = x_{n-1} + x_{n-2},\ \ 3 \leqslant n \in \mathbb{N},$ *(последовательность Фибоначчи)*;

(б) $x_1 = a,\ \ x_2 = b,\ \ x_n = x_{n-1} - \dfrac{x_{n-2}}{4},\ \ 3 \leqslant n \in \mathbb{N}.$

3.16. $\star$ Докажите, что последовательность $\{x_n\}$, заданная условием $x_{n+1} = x_n + \dfrac{x_n^2}{n^2}$ при $n \in \mathbb{N}$, где $0 < x_1 < 1$, ограничена.

3.17. На отрезке AB, длины l строится последовательность точек $\{x_n\}$ следующим образом: $x_1 = A,\ \ x_2 = B$, каждая следующая точка x_{n+1} является серединой отрезка, соединяющего точки x_{n-1} и x_n. К какой точке отрезка AB стремится последовательность $\{x_n\}$?

3.18. $\star$ (*модификация последовательности Фарея*)

Определим последовательность $\{a_n\}$ следующим образом:

$$a_0 = 1,\ \ a_{2n+1} = a_n,\ \ a_{2n+2} = a_n + a_{n+1},\ \ \mathbb{Z} \ni n \geqslant 0.$$

Докажите, что множество $\left\{\dfrac{a_{n-1}}{a_n}, n \in \mathbb{N}\right\} = \left\{\dfrac{1}{1}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{1}, \dfrac{1}{3}\ldots\right\}$ содержит все положительные рациональные числа.

3.19. $\star$ Найдите значения параметров a и b, при которых сходится последовательность

$$x_0 = a,\ x_n = 1 + b\cdot x_{n-1},\ n = 1, 2, \ldots$$

И вычислите её предел в данных случаях.

3.20. $\star$ Пусть $m, n \in \mathbb{N}$. Докажите, что любое множество из $mn+1$ попарно различных действительных чисел содержит либо строго возрастающую совокупность из $m+1$ чисел, либо строго убывающую совокупность из $n+1$ чисел.

3.21. $\star$ Рассмотрим последовательность $\{x_n\}$, не равных 0 вещественных чисел, таких что для всех $n \in \mathbb{N}$ выполнено: $x_{n+1}^2 - x_n \cdot x_{n+2} = 1$. Докажите, что найдется такое действительное число a, что $x_{n+2} = a\cdot x_{n+1} - x_n,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Теорема *(теорема о двух эвольвентах):*

Если для $\forall n$, начиная с некоторого, выполнено:

$$y_n \leqslant x_n \leqslant z_n, \text{ а также } \exists \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} z_n = a.$$

Тогда $\exists \lim_{n\to\infty} x_n = a$.

4.1. • Пусть $a > 1$. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{a^n} = 0$.

4.2. *(60)* Пусть $a > 1$. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^k}{a^n} = 0$ для $\forall k \in \mathbb{Z}$.

4.3. *(63,65)* Докажите следующие равенства, используя теорему о двух эвольвентах:

(а) • $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$, при $a > 0$; *(б)* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

4.4. *(62)* Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot q^n = 0$, при $|q| < 1$.

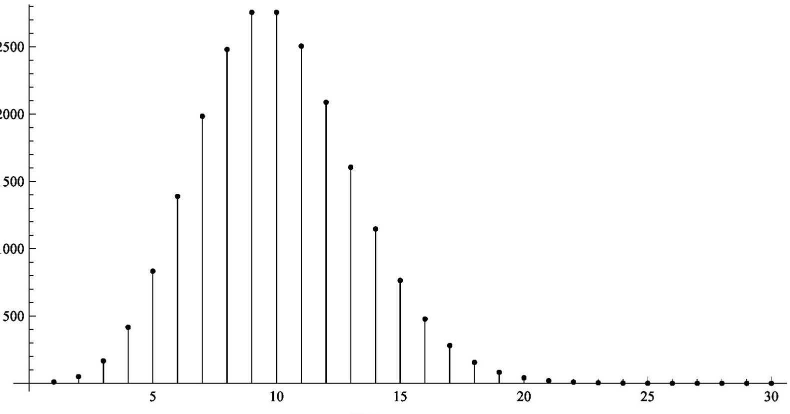
4.5. *(61,66)* Докажите, что:

(а) • $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n}{n!} = 0$;

(б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0$, $\forall a \in \mathbb{R}$;

(в) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$.

(г) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n} = 0$.



$x_n = \dfrac{10^n}{n!}$

4.6. *(64)* • Пусть $a > 1$. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log_a n}{n} = 0$.

4.7. Докажите, что при $0 < k < 1$ $\lim\limits_{n\to\infty} \left[(n+k)^k - n^k\right] = 0$.

4.8. • Найдите предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} \cdot \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$.

4.9. *(68)* Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}\right)=0.$

4.10.

(а) • Найдите предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$;

(б) Пусть дано m положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_m$ и $A=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant m} a_i$. Найдите предел

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\ldots+a_m^n}.$$

4.11. *(91)* • Докажите, что если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|a|$.
Приведите пример, что обратное утверждение может не выполняться.

4.12. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ и $x_n \geqslant -1$ для $\forall n\in\mathbb{N}$.

Далее, пусть $p\in\mathbb{N}$. Докажите, что

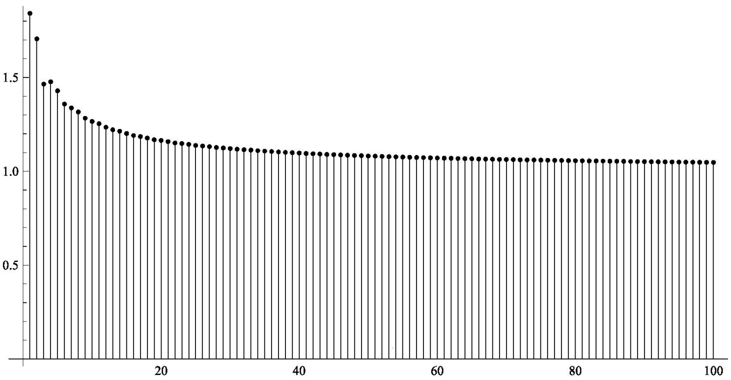
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[p]{1+x_n}=1.$$

4.13. Найдите пределы следующих последовательностей:

(а) $x_n=\dfrac{(n+1)^{2010}}{n^{2010}+1}$;

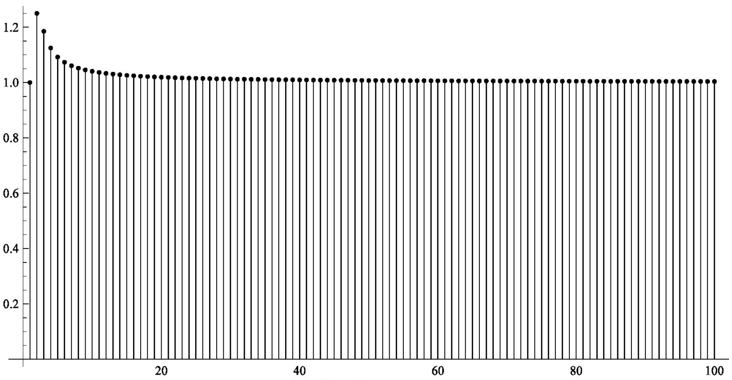
(б) $x_n=\sqrt[n]{\dfrac{2^n+3^n+4^n}{5^n+6^n}}$;

(в) • $x_n=\sqrt[n]{n+|\sin n|}$.



$x_n=\sqrt[n]{n+|\sin n|}$

4.14. Найдите пределы:



$x_n=\dfrac{1^1+2^2+\ldots+n^n}{n^n}$

(а) • $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^1+2^2+\ldots+n^n}{n^n}$;

(б) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n}}$;

(в) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{n}$;

(г) $\lim\limits_{n\to\infty}2^{\frac{1}{\sqrt{n}}}$.

4.15. Докажите, что выполняются следующие неравенства:

$$\left(\frac{k}{e}\right)^k < k!, \text{ при } k \geqslant 1, \quad k! < k\left(\frac{k}{e}\right)^k, \text{ при } k \geqslant 11,$$

и вычислите предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \sqrt[n]{(n+1)(n+2)\ldots(n+n)}.$$

4.16. $\star$ Для последовательности $\{a_n\}$ справедливы следующие соотношения:

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \to a, \text{ при } n \to \infty;$$

$$n(a_{n+1} - a_n) \to b, \text{ при } n \to \infty,$$

для некоторых $a, b \in \mathbb{R}$. Докажите, что последовательность $\{a_n\}$ сходится, и найдите её предел.

4.17. $\star$ Пусть $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ - две последовательности такие, что:

$$\text{для } \forall x \in [1;\, 2] \text{ выполнено } a_n + b_n x \to c(x) \in \mathbb{R} \text{ при } n \to \infty.$$

Докажите, что последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ сходятся и определите функцию $c(x)$.

4.18. $\star$ Пусть для каждого $n \in \mathbb{N}$ a_n и b_n - целые числа, заданные равенством:

$$\left(1 + \sqrt{3}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{3}.$$

Вычислите предел $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$.

4.19. $\star$ Пусть для положительных чисел a и b выполнены равенства:

$$a_1 = \frac{ab}{a+b}; \quad a_{n+1} = \frac{ab}{a+b-a_n}, \quad n \geqslant 1.$$

Найдите выражение для a_n и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

4.20. $\star$ Пусть $a_1 = a,\ a_{n+1} = a_n^2 - 2,\ n \geqslant 1$. При каких значениях a последовательность $\{a_n\}$ сходится?

Определение: Последовательность $\{x_n\}$ называется *выпуклой*, если

$$x_n \leqslant \frac{x_{n-1} + x_{n+1}}{2} \text{ при } n = 2, 3, \ldots$$

4.21. $\star$ Докажите, что для любой положительной строго убывающей к нулю последовательности можно построить мажорирующую её выпуклую последовательность, стремящуюся к нулю.

4.22. $\star$

(а) (Вавилонский алгоритм вычисления $\sqrt{2}$)

Последовательность $\{x_n\}$ задана условиями:

$$x_1 = 1;\ \ x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right),\ \ n \geqslant 1.$$

Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{2}$.

<u>Замечание:</u> вычисления показывают, что последовательность $\{x_n\}$ сходится к $\sqrt{2}$ очень быстро. Так, например, $x_4 - \sqrt{2} = 2.124 \cdot 10^{-6}$.

(б) К чему будет стремиться последовательность из пункта *а)*, если в качестве начального условия выбрать $x_1 = -1$?

(в) (Итерационная формула Герона)

Докажите, что последовательность чисел $\{x_n\}$ заданная условиями:

$$x_1 = 1;\ \ x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right),\ \ n \geqslant 1,\ a > 0\ \text{ сходится.}$$

Найдите предел этой последовательности.

(г) Пусть $a > 0$ и $k > 0$ - произвольные действительные числа. Определим последовательность $\{a_n\}$ равенствами:

$$a_0 = a,\ \ a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{k}{a_n}\right),\ n \geqslant 0.$$

Докажите, что при $\forall n \in \mathbb{N}$ выполняется равенство:

$$\frac{a_n - \sqrt{k}}{a_n + \sqrt{k}} = \left(\frac{a - \sqrt{k}}{a + \sqrt{k}}\right)^{2^n}.$$

4.23. $\star$ Пусть

$$\alpha_n = \sqrt[n]{1 + \sqrt[n+1]{1 + \sqrt[n+2]{1 + \ldots}}}\qquad \text{(бесконечное число корней).}$$

Конечны ли эти величины? Чему равен $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n$?

4.24. $\star$ Докажите, что

$$9\ =\ \sqrt{3u_2u_4 + u_4\sqrt{3u_4u_6 + u_6\sqrt{3u_6u_8 + \ldots}}},$$

где $\{u_n\}$ - *последовательность Фибоначчи.*

Определение: Последовательность $\{x_n\}$ называется *монотонной*, если для $\forall n \in \mathbb{N}$ выполнено одно из условий:

$x_{n+1} > x_n,$ $\{x_n\}$ - *возрастающая,* $\{x_n\}\uparrow$

$x_{n+1} \geqslant x_n,$ $\{x_n\}$ - *неубывающая,* $\{x_n\}\nearrow$

$x_{n+1} \leqslant x_n,$ $\{x_n\}$ - *невозрастающая,* $\{x_n\}\searrow$

$x_{n+1} < x_n,$ $\{x_n\}$ - *убывающая,* $\{x_n\}\downarrow$

Теорема *(Вейерштрасс)*:

Пусть последовательность $\{a_n\}$ возрастает или неубывает и ограничена сверху, тогда $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n\}$, где $\sup\{a_n\}-$ наименьшее из чисел, ограничивающих данную последовательности сверху.

Пусть последовательность $\{a_n\}$ убывает или невозрастает и ограничена снизу, тогда $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n\}$, где $\inf\{a_n\}-$ наибольшее из чисел, ограничивающих данную последовательности снизу.

5.1. • Пусть $a > 0$. Докажите сходимость последовательности

$$x_n = \underbrace{\sqrt{a + \sqrt{a + \ldots + \sqrt{a}}}}_{n \text{ корней}}$$

и найдите её предел

5.2. *(среднее арифметико-геометрическое)*

Пусть даны два положительных числа $a > b$. Положим

$$a_1 = \frac{a+b}{2},\ \ b_1 = \sqrt{ab},\quad a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2},\ \ b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n},\quad n = 1, 2, \ldots .$$

Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Замечание: В данном примере мы не находим выражение для предела, но, зная, что он существует, легко можем вычислить его с любой степенью точности, т.к. он содержится между последовательностями a_n и b_n ($a_n \geqslant b_n$ для $\forall n$). Вычисление данного предела будет проведено в дальнейшем.

5.3. *(69)* $\bullet$ *(число* $\boldsymbol{e}$*)*

Докажите, что последовательность $x_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ монотонно возрастает и ограничена сверху, а последовательность $y_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ монотонно убывает и ограничена снизу. Отсюда, выведите что эти последовательности имеют общий предел:

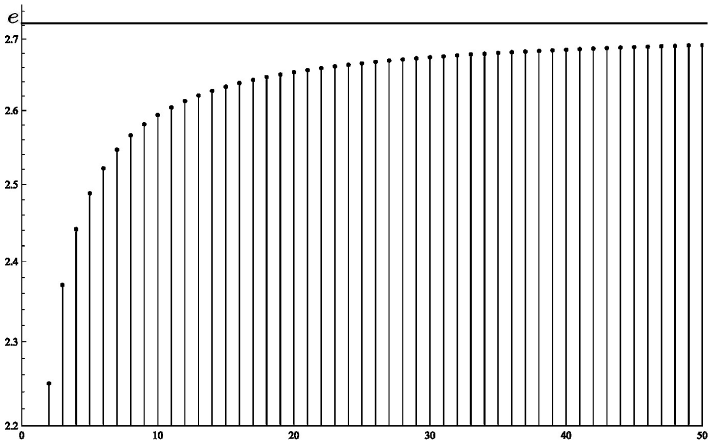
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = e.$$

5.4. Используя равенство $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$,

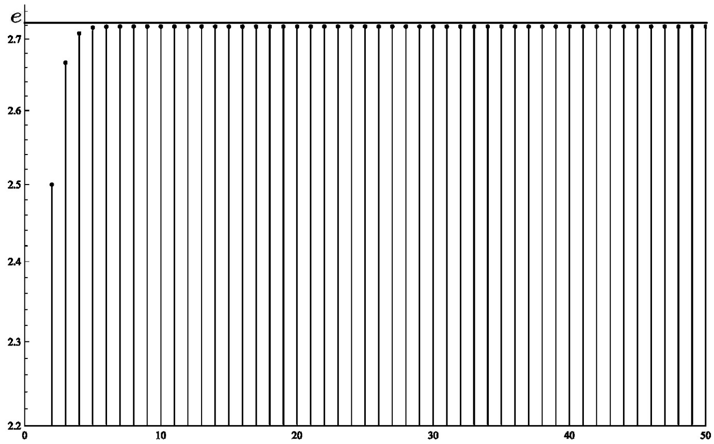
(а) $\bullet$ Докажите, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} = e;$$

<u>**Замечание:**</u> Последовательность $\{s_n\} = 2 + \dfrac{1}{2!} + \ldots + \dfrac{1}{n!}$ сходится к числу e гораздо быстрее последовательности $\{e_n\} = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$, и поэтому, применима к вычислениям числа e значительно лучше. Например, $e - e_5 \approx 0,2299$; $e - s_5 \approx 0,0016$. Более подробно скорости сходимости данных последовательностей можно изучить по рисунку.



$\{e_n\} = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$



$\{s_n\} = 2+\dfrac{1}{2!}+\ldots+\dfrac{1}{n!}$

(б) Докажите, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{k}{n}\right)^n = e^k \quad \text{где} \quad k \in \mathbb{N},\ k \geqslant 2.$$

<u>**Замечание:**</u> Основная трудность этой задачи заключается в доказательстве сходимости данной последовательности.

(в) выведите формулу:

$$e = 2 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta_n}{n!n}, \quad \text{где} \quad 0 < \theta_n < 1.$$

(г) докажите, что число e иррациональное.

Замечание: Отметим, что число e не только *иррациональное*, но даже *трансцендентное* (число, не являющееся корнем никакого многочлена с целыми коэффициентами).

(д) $\star$ докажите, что $Ae^2 + Be + C \neq 0$, если $A,\ B,\ C \in \mathbb{Z}$, $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

5.5. *(70)* Докажите, что

$$0 < e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \frac{3}{n}, \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

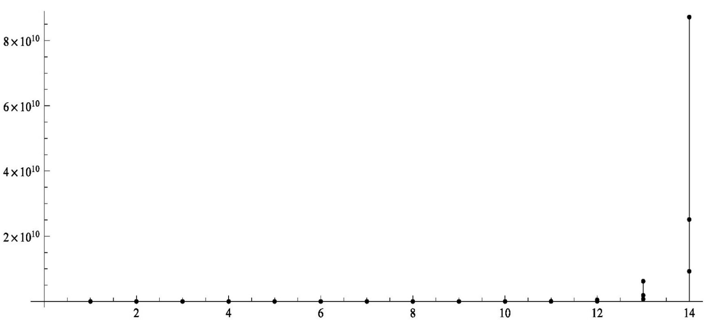
5.6. *(71)* Пусть $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ - произвольная последовательность чисел, стремящихся к $+\infty$, и $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ - последовательность, стремящихся к $-\infty$, $\big(p_n, q_n \notin [-1, 0]\big)$. Докажите, что

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{p_n}\right)^{p_n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{q_n}\right)^{q_n} = e.$$

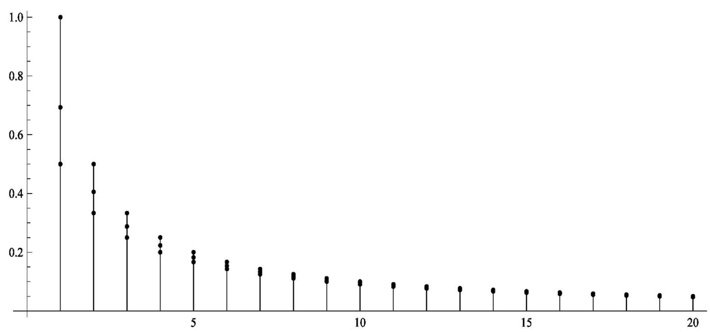
5.7. *(74,75)* Пусть $n \in \mathbb{N}$. Докажите следующие неравенства:

(а) $\bullet$ $\left(\dfrac{n}{e}\right)^n < n! < e\left(\dfrac{n}{2}\right)^n$; *(б)* $\bullet$ $\dfrac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) < \dfrac{1}{n}$;

(в) $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1} < \left(1 + \dfrac{1}{n-1}\right)^n$; *(г)* $1 + \alpha < e^{\alpha}$, где $0 \neq \alpha \in \mathbb{R}$.



$\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$, $n!$, $e\left(\dfrac{n}{2}\right)^n$



$\dfrac{1}{n+1}$, $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$, $\dfrac{1}{n}$

5.8. *(79,80)* Докажите сходимость следующих последовательностей:

(а) $x_n = \left(1 - \dfrac{1}{2}\right)\left(1 - \dfrac{1}{4}\right)\ldots\left(1 - \dfrac{1}{2^n}\right)$;

(б) $\bullet$ $x_n = \left(1 + \dfrac{1}{2}\right)\left(1 + \dfrac{1}{4}\right)\ldots\left(1 + \dfrac{1}{2^n}\right)$;

5.9. *(90)* Докажите, что монотонная последовательность будет сходящейся, если сходится некоторая ее подпоследовательность.

5.10. Последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ определяются следующими соотношениями:

$$a_1 = 1,\ \ b_1 = 1, \quad a_{n+1} = \sqrt{2 + b_n},\ \ b_{n+1} = \sqrt{2a_n},\ \ n = 1, 2, \ldots.$$

Докажите, что эти последовательности сходятся, и найдите их пределы.

5.11.

(а) $\star$ Докажите, что последовательность $\left\{\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}\right\}$, $n \geqslant 1$ строго возрастает и сходится к числу e, а последовательность $\left\{\dfrac{n}{(\sqrt[n]{n!})^2},\ n \geqslant 2\right\}$ строго убывает и сходится к 0.

(б) Докажите, что $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \underbrace{\sqrt[n]{n! + \sqrt[n]{n! + \ldots + \sqrt[n]{n!}}}}_{n \text{ факториалов}} = \frac{1}{e}.$

5.12. Пусть $1 < p \in \mathbb{N}$ и $x_n = \underbrace{\sqrt[p]{1 + \sqrt[p]{1 + \ldots + \sqrt[p]{1}}}}_{n \text{ корней}}.$

Докажите, что последовательность $\{x_n\}$ сходится к положительному корню уравнения

$$x^p - x - 1 = 0.$$

5.13. $\star$ *(задача Рамануджана)* Пусть $x_n = \sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + \ldots + n\sqrt{1 + n}}}}.$

Докажите, что существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, и найдите его.

5.14. $\star$ *(задача о тетрации)*

Пусть последовательность $\{a_n\}$ задана формулами:

$$a_1 = a > 0, \quad a_2 = a^a, \quad a_3 = a^{a^a}, \ldots, a_{n+1} = a^{a_n}, \ldots$$

Докажите, что данная последовательность сходится тогда и только тогда, когда

$$a \in \left[\left(\tfrac{1}{e}\right)^e;\ \ e^{\frac{1}{e}}\right].$$

<u>**Замечание:**</u> Много интересной информации по этой и подобным задачам можно найти из списка литературы: **http://www.tetration.org/Links/index.html**.

5.15. $\star$ Найдите необходимые и достаточные условия, накладываемые на последовательность $\{x_n\}$ для того, чтобы существовала биекция $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такая, что последовательность $\{x_{\sigma(n)}\}$ монотонно **строго** возрастает?

5.16. $\star$ Докажите, что

$$\lim_{n\to\infty} \left(\mathbf{C}_n^0 \cdot \mathbf{C}_n^1 \cdot \mathbf{C}_n^2 \cdot \ldots \cdot \mathbf{C}_n^n\right)^{\frac{2}{n(n+1)}} = e, \quad \text{где } \mathbf{C}_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Определение: Назовем последовательность $\{x_n\}$ - *фундаментальной* или *последовательностью Коши*, если

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon)\ :\ \forall n\geqslant N(\varepsilon),\ \forall p\in\mathbb{N}\implies|x_n-x_{n+p}|<\varepsilon,\ \text{или}$$

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon)\ :\ \forall n\geqslant N(\varepsilon),\ \forall m\geqslant N(\varepsilon)\implies|x_n-x_m|<\varepsilon.$$

Теорема *(критерий Коши):* Последовательность $\{x_n\}$ сходится, тогда и только тогда, когда $\{x_n\}$ фундаментальна.

Замечание: Критерий Коши можно переформулировать так: числовая последовательность сходится, тогда и только тогда, когда ее значения безгранично сближаются между собой по мере возрастания их номеров. То есть, числовая последовательность не может "попасть" в $\varepsilon-$трубку с "несблизившимися" членами. И, наоборот, если числовая последовательность "попала" в $\varepsilon-$трубку, то ее члены заведомо сблизились между собой.

Отрицания фундаментальности последовательности x_n:

$$\exists\,\varepsilon>0\ :\ \forall N\in\mathbb{N}\ \exists n\geqslant N,\ \exists p\in\mathbb{N}\quad|x_n-x_{n+p}|\geqslant\varepsilon;$$

$$\exists\,\varepsilon>0\ :\ \forall n\in\mathbb{N}\ \exists p\in\mathbb{N}\ :\ |x_n-x_{n+p}|\geqslant\varepsilon.$$

Замечание: Отрицание фундаментальности часто бывает полезно для доказательства несуществования предельного значения.

6.1. *(82,84,85)* Пользуясь критерием Коши, докажите сходимость следующих последовательностей:

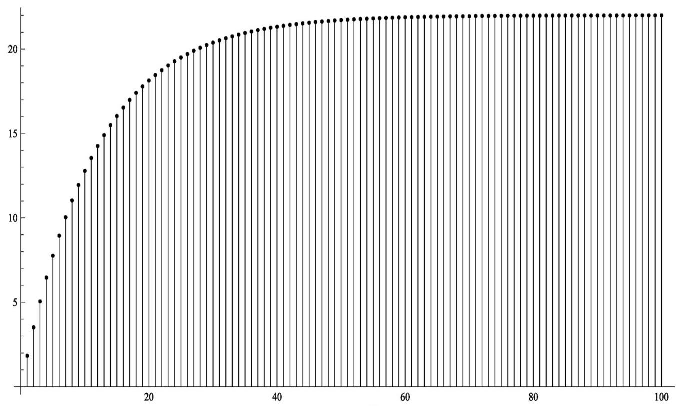
(а) • $x_n=a_0+a_1q+\ldots+a_nq^n$, где $|a_k|<M\in\mathbb{R}$, для $\forall k$ и $|q|<1$;

(б) $x_n=\dfrac{\cos 1!}{1\cdot 2}+\dfrac{\cos 2!}{2\cdot 3}+\ldots+\dfrac{\cos n!}{n\cdot(n+1)}$;

(в) $x_n=\dfrac{\sin 1}{3}+\dfrac{\sin 2}{3^2}+\ldots+\dfrac{\sin n}{3^n}$;

(г) $x_n=1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\ldots+\dfrac{1}{n^2}$;

(д) $x_n=\dfrac{1}{1\cdot 2}-\dfrac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\dfrac{(-1)^{n-1}}{n\cdot(n+1)}$.



$x_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{11}{12}\right)^k$

6.2. • Предположим, что для последовательности $\{a_n\}$ справедливы неравенства

$$|a_{n+1} - a_n| < \frac{1}{2^n}, \quad \text{для } \forall n \geqslant 1.$$

Докажите, что данная последовательность сходится.

6.3. Используя критерий Коши, докажите расходимость следующих последовательностей:

(а) • $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$, *(б)* $x_n = \frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \ldots + \frac{1}{\ln n}$;

(в) $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{3k-2} + \frac{1}{3k-1} - \frac{1}{3k} \right)$, *(г)* $x_n = \frac{n \cos \pi n - 1}{2n}$.

6.4. *(92)* •
Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то что можно сказать о пределе $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$?

Определение: Будем говорить, что последовательность $\{x_n\}$ имеет *ограниченное изменение* (или *ограниченную вариацию*), если

$$\exists C > 0 \,:\, |x_2 - x_1| + |x_3 - x_2| + \ldots + |x_n - x_{n-1}| < C, \quad (n = 2, 3, \ldots)$$

6.5. *(86)*

(а) Докажите, что последовательность с ограниченным изменением сходится;

(б) Приведите пример сходящейся последовательности, не имеющей ограниченного изменения.

(в) ⋆ Докажите, что для всякой последовательности $\{x_n\}$ с ограниченным изменением существуют возрастающие ограниченные последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ такие, что $x_n = a_n - b_n$, $n \in \mathbb{N}$.

6.6. Предположим, что для последовательности $\{a_n\}$ существует $\alpha \in (0, 1)$:

$$|a_{n+1} - a_n| \leqslant \alpha |a_n - a_{n-1}|, \quad n \geqslant 2.$$

Докажите, что последовательность $\{a_n\}$ сходится.

6.7. • Существует ли предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sin n$, где $n \in \mathbb{N}$?

6.8. "Усилим" критерий Коши, потребовав выполнение неравенства $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$ не для произвольного $p \in \mathbb{N}$, а лишь для некоторого *фиксированного* $p \in \mathbb{N}$. Можно ли утверждать сходимость последовательности, удовлетворяющей новому критерию?

6.9. • Пусть $\{a_k \,|\, k \geqslant 1\}$ – фиксированная последовательность, состоящая из чисел $\{0, 1, \ldots 9\}$. Докажите, что последовательность $\left\{ x_n = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots + \frac{a_n}{10^n} \right\}$ фундаментальная.

6.10. (*теорема Коши о «прореживании»* или *телескопический признак сходимости*)

(а) • Предположим, что $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant \ldots \geqslant 0$. Докажите, *не используя критерий Коши*, что последовательность $x_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ сходится тогда и только тогда, когда сходится последовательность $y_n = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \ldots + 2^n a_{2^n}$;

(б) ⋆ Докажите утверждение пункта (*а*), *используя критерий Коши*;

Замечание: Поразительная особенность данного утверждения состоит в том, что довольно "редкая" подпоследовательность последовательности $\{x_n\}$ определяет ее сходимость или расходимость.

(в) Докажите, что последовательность $x_n = 1 + \dfrac{1}{2^p} + \dfrac{1}{3^p} + \ldots + \dfrac{1}{n^p}$, сходится тогда и только тогда, когда $p > 1$;

(г) Докажите, что последовательность $x_n = 1 + \dfrac{1}{2(\ln 2)^p} + \dfrac{1}{3(\ln 3)^p} + \ldots + \dfrac{1}{n(\ln n)^p}$, сходится тогда и только тогда, когда $p > 1$.

6.11. Найдите следующие пределы, используя теорему Штольца *(см. в конце листочка)*

(а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \ldots + \sqrt[n]{n}}{n}$; *(б)* $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k}{n^k} - \dfrac{n}{k+1}\right)$, где $k \in \mathbb{N}$.

(в) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k}{n^{k+1}}$, где $k \in \mathbb{N}$; *(г)* $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$;

6.12. ⋆ Пусть

$$a_1 = 1 \ \text{ и } \ a_{n+1} = a_n(1 + |\sin a_n|)^{-1}, \ \ n \geqslant 1. \ \text{ Вычислите предел } \lim_{n\to\infty}(n \cdot a_n).$$

6.13. ⋆ Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $a \in \mathbb{R}$, а α – фиксированное число, $|\alpha| < 1$. Пусть также

$$b_n = a_n + \alpha a_{n-1} + \alpha^2 a_{n-2} + \ldots + \alpha^{n-1} a_1, \ \ n \geqslant 1.$$

Вычислите предел: $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

6.14. ⋆ Для последовательности $\{a_n\}$ пусть

$$x_n = a_n + a_{n-1}, \ \ y_n = 2a_n + a_{n-1}, \quad n \geqslant 2.$$

Докажите, что:

1) из сходимости последовательности $\{x_n\}$ не следует сходимость $\{a_n\}$;

2) если $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y \in \mathbb{R}$, то последовательность $\{a_n\}$ сходится. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Теорема (*теорема Штольца*): Пусть x_n и y_n — две последовательности вещественных чисел, удовлетворяющие следующим условиям:

1. Для всех $n \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство $y_n < y_{n+1}$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$;
3. Существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}$ (конечный или бесконечный одного знака).

Тогда существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n}$, причём справедливо равенство: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}$.

► Сначала рассмотрим случай конечного предела, т.е. пусть $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = a < \infty$.

Тогда для $\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon)$ такое, что для $\forall n \geqslant N$ выполнено:

$$\left|\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} - a\right| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad \text{Откуда имеем}\ \ a - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} < a + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Запишем данные неравенство для номеров $N+1, N+2, \ldots, n$:

$$\forall n \geqslant N(\varepsilon) \implies a - \frac{\varepsilon}{2} \ <\ \frac{x_{N+1} - x_N}{y_{N+1} - y_N},\ \ \frac{x_{N+2} - x_{N+1}}{y_{N+2} - y_{N+1}}, \ldots,\ \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} \ <\ a + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Помножим каждое из данных неравенств на знаменатель, стоящей в нём дроби, и просуммируем их. Пользуясь верным для всех n неравенством $y_n < y_{n+1}$, получаем:

$$\left(a - \frac{\varepsilon}{2}\right)\big((y_n - y_{n-1}) + (y_{n-1} - y_{n-2}) + \ldots + (y_{N+1} - y_N)\big) < (x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) + \ldots + (x_{N+1} - x_N) <$$

$$< \left(a + \frac{\varepsilon}{2}\right)\big((y_n - y_{n-1}) + (y_{n-1} - y_{n-2}) + \ldots + (y_{N+1} - y_N)\big) \implies$$

$$\implies a - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{x_n - x_N}{y_n - y_N} < a + \frac{\varepsilon}{2} \iff \left|\frac{x_n - x_N}{y_n - y_N} - a\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Далее, т.к. $\dfrac{x_n}{y_n} - a = \dfrac{x_N - a\,y_N}{y_n} + \left(1 - \dfrac{y_N}{y_n}\right)\left(\dfrac{x_n - x_N}{y_n - y_N} - a\right)$, то

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - a\right| \leqslant \left|\frac{x_N - a\,y_N}{y_n}\right| + \left|\frac{x_n - x_N}{y_n - y_N} - a\right| \cdot \left|1 - \frac{y_N}{y_n}\right|$$

Слагаемое $\left|\dfrac{x_n - x_N}{y_n - y_N} - a\right|$, как мы установили, при $n \geqslant N$ становится меньше $\dfrac{\varepsilon}{2}$; слагаемое $\left|\dfrac{x_N - a\,y_N}{y_n}\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ при достаточно больших $n \geqslant \widetilde{N}(\varepsilon)$, т.к. величина $(x_N - a\,y_N)$ – фиксирована, а $y_n \to +\infty$. Наконец, множитель $\left|1 - \dfrac{y_N}{y_n}\right|$ в силу монотонности последовательности y_n строго меньше 1 при $n > N(\varepsilon)$.

Поэтому,

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - a\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad \text{для}\ \forall \varepsilon > 0\ \ \text{и}\ \ \forall n \geqslant \max\left\{N(\varepsilon)\,;\, \widetilde{N}(\varepsilon)\right\}.$$

Случай бесконечного предела: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = +\infty$, легко приводится к рассмотренному случаю "переворачиванием дроби".

■

Предельные точки последовательности и множества

Определение: Число ξ (или символ ∞) называется частичным пределом последовательности $\{x_n\}$, если найдется такая её подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n_k} = \xi$.

Определение: Назовем наибольший частичный предел последовательности $\{x_n\}$ - *верхним пределом* последовательности $\{x_n\}$. Обозначение: $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$.

Определение: Назовем наименьший частичный предел последовательности $\{x_n\}$ - *нижним пределом* последовательности $\{x_n\}$. Обозначение: $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$.

Теорема *(Принцип Больцано-Вейерштрасса):*

Если последовательность ограничена, то у нее существует хотя бы один конечный частичный предел.

Теорема: Равенство $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$. является необходимым и достаточным условием существования предела (конечного или бесконечного) последовательности $\{x_n\}$.

7.1. *(101, 102, 103, 104, 105, 106)*

Для последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ найдите $\inf\limits_n x_n$, $\sup\limits_n x_n$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$, если:

(а) $x_n = 1 - \dfrac{1}{n}$;

(б) • $x_n = (-1)^{n-1}\left(2 + \dfrac{3}{n}\right)$;

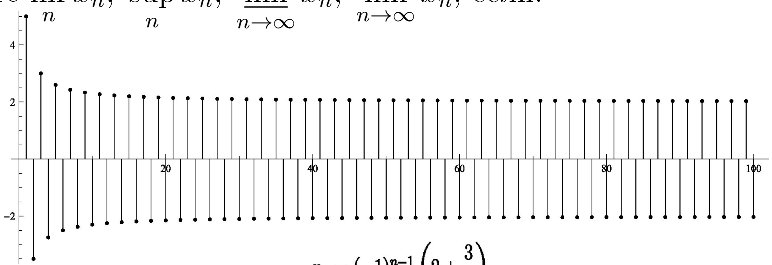
(в) $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n} + \dfrac{1+(-1)^n}{2}$;

(г) $x_n = 1 + \dfrac{n}{n+1}\cos\dfrac{\pi n}{2}$;

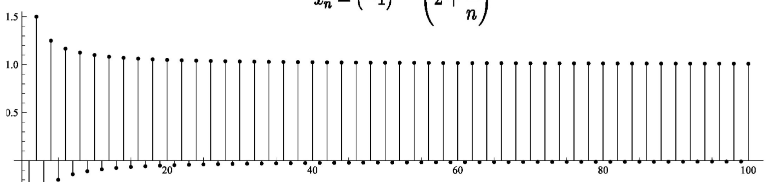
(д) $x_n = 1 + 2(-1)^{n+1} + 3(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$;

(е) $x_n = \dfrac{n-1}{n+1}\cos\dfrac{2\pi n}{3}$;

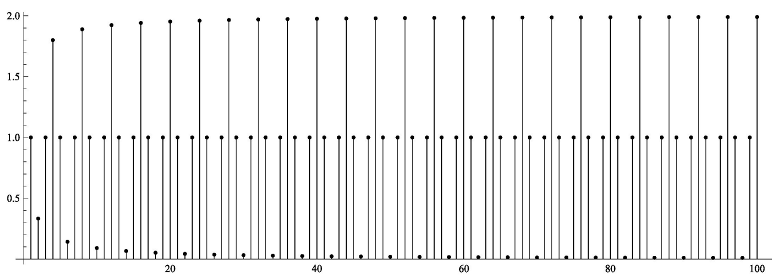
(ж) $x_n = (-1)^n\, n$.



$x_n = (-1)^{n-1}\left(2+\dfrac{3}{n}\right)$



$x_n = \dfrac{(-1)^n}{n} + \dfrac{1+(-1)^n}{2}$



$x_n = 1 + \dfrac{n}{n+1}\cos\dfrac{\pi n}{2}$

Замечание: Под $\sup\limits_n x_n$, $\left(\inf\limits_n x_n\right)$ понимается наименьшее из чисел, ограничивающих последовательность x_n сверху (наибольшее из чисел, ограничивающих x_n снизу).

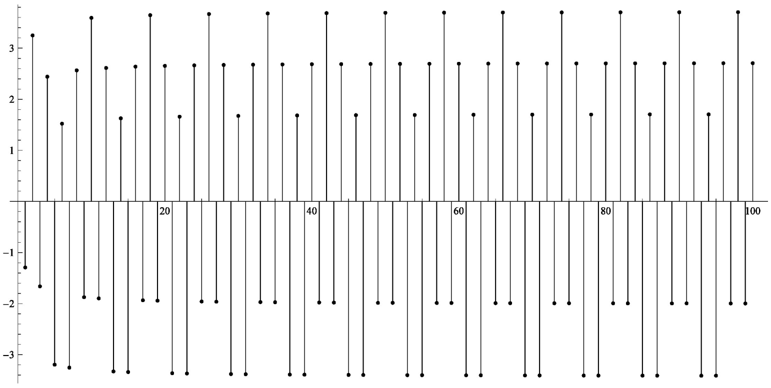
7.2. *(112, 114)* Найдите $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$, $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$, если:

(а) • $x_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n (-1)^n + \sin\dfrac{\pi n}{4}$;

(б) $x_n = \sqrt[n]{1 + 2^{n(-1)^n}}$;

(в) $x_n = \left(1 + \sin\dfrac{\pi n}{4}\right)\left(1 - \cos\dfrac{\pi n}{6}\right)$;

(г) $x_n = n \ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n}\right)$.



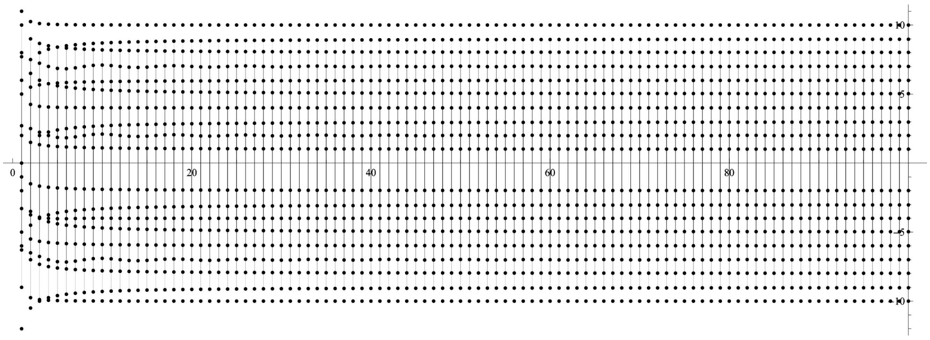
$x_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n (-1)^n + \sin\dfrac{\pi n}{4}$

7.3. *(Характеризация частичного предела)*

Докажите, что число $a \in \mathbb{R}$ есть частичный предел последовательности x_n тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \forall N \in \mathbb{N} \;\; \exists \overline{n} \in \mathbb{N} \; : \; \overline{n} \geqslant N, \quad |x_{\overline{n}} - a| < \varepsilon.$$

7.4. Постройте последовательность, частичные пределы которой -



(а) все целые числа;

(б) • все числа из отрезка $[0, 1]$;

(в) все действительные числа;

<u>**Замечание:**</u> Интересным является факт, что, и отрезок $[0, 1]$, и действительная прямая $\mathbb{R}$ имеют мощность континуум, а приближающие их с любой степенью точности последовательности - счётны.

7.5. *(121, 122)*

(а) Постройте пример числовой последовательности, имеющей в качестве своих частичных пределов данные числа: $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$

(б) • Постройте пример числовой последовательности, для которой все члены данной последовательности: $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ являются ее частичными пределами. Какие ещё частичные пределы **обязательно** имеет построенная последовательность?

7.6. *(124)* Докажите, что последовательности x_n и $y_n = x_n \sqrt[n]{n}$ имеют одни и те же частичные пределы.

7.7. *(127, 128)*

Что можно утверждать о сходимости последовательностей $\{x_n + y_n\}$, $\{x_n \cdot y_n\}$, если:

(а) • $\{x_n\}$ - сходится, $\{y_n\}$ - расходится;

(б) $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ - расходятся.

7.8. $\star$

(а) Последовательность $\{a_n\}$ такова, что её подпоследовательности $\{a_{2n}\}$ и $\{a_{2n+1}\}$ сходятся. Сходится ли последовательность $\{a_n\}$?

(б) Последовательность $\{a_n\}$ такова, что её подпоследовательности $\{a_{2n}\}$, $\{a_{2n+1}\}$ и $\{a_{3n}\}$ сходятся. Сходится ли последовательность $\{a_n\}$?

(в) Приведите пример не имеющей предела последовательности $\{a_n\}$, для которой сходится каждая из последовательностей $\{a_{m \cdot k}\}_{k=1}^{\infty}$, $m \geqslant 2$ - фиксированное число.

7.9. Постройте пример последовательности, для которой множество всех частичных пределов есть $\left\{ \frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{0\}$.

7.10. Докажите, что каждое из следующих множеств, и только оно, не может быть множеством **<u>всех</u>** частичных пределов некоторой числовой последовательности:

(а) • $\left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$; *(б)* $(0,1)$; *(в)* $\mathbb{Q}$; *(г)* $\mathbb{R}$;

7.11.

(а) Докажите, что любая последовательность действительных чисел содержит монотонную подпоследовательность.

(б) Укажите какую-нибудь строго монотонную подпоследовательность последовательности $\left\{ \sqrt{n} - [\sqrt{n}] \right\}$, где $[\alpha]$ обозначает целую часть числа α.

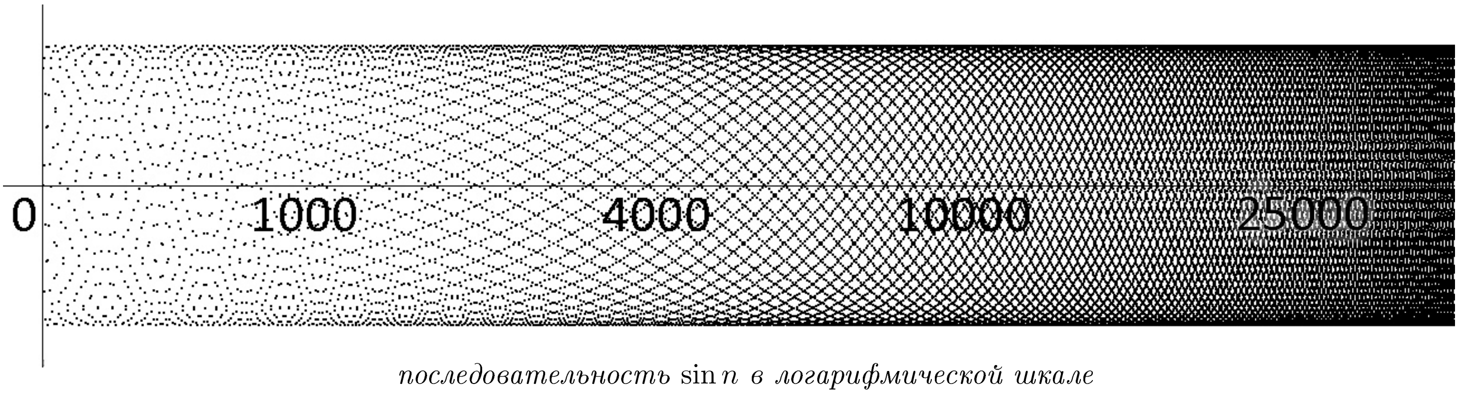
7.12. Опишите множество **A** всех частичных пределов монотонной последовательности.

7.13. Докажите, что:

(а) • $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left\{ \sup\limits_{m \geqslant n} x_m \right\} = \inf\limits_{n} \left\{ \sup\limits_{m \geqslant n} x_m \right\}$; *(б)* $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left\{ \inf\limits_{m \geqslant n} x_m \right\} = \sup\limits_{n} \left\{ \inf\limits_{m \geqslant n} x_m \right\}$.

<u>Замечание:</u> Указанные соотношения иногда берутся за определения нижнего и верхнего пределов последовательности. В этом случае доказывается, что выражения, определённые таким образом являются соответственно наименьшим и наибольшим из частичных пределов данной последовательности.

7.14. $\star$ Найдите множество всех частичных пределов последовательности $x_n = \sin n$.



последовательность $\sin n$ *в логарифмической шкале*

7.15. $\star$ Множество $\mathbf{A} \subset \overline{\mathbb{R}}$ называется *замкнутым*, если для любой последовательности $\{x_n\}$ сходящейся к числу $x \in \overline{\mathbb{R}}$, предел x принадлежит множеству $\mathbf{A}$. Докажите, что любое непустое замкнутое множество $\mathbf{A} \subset \overline{\mathbb{R}}$ есть множество всех частичных пределов некоторой последовательности $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$.

7.16. $\star$ Последовательность неотрицательных чисел $\{a_n\}$ для фиксированных параметров $p \geqslant 0,\ q \geqslant 0,\ p + q < 1$ удовлетворяет соотношениям:

$$a_{n+2} \leqslant pa_{n+1} + qa_n, \quad n \geqslant 1.$$

Докажите, что данная последовательность сходится, и найдите её предел.

7.17. $\star$ Пусть $a_1 = 1$, $a_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k}$ при $n \geqslant 2$. Докажите, что $\dfrac{2}{3} \leqslant \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

7.18. $\star$ Определите множество предельных точек множества $\left\{\sqrt[3]{n} - \sqrt[3]{m},\ n, m \in \mathbb{N}\right\}$.

7.19. $\star$ Пусть числовая последовательность $\{a_n\}$ удовлетворяет условию

$$a_{m+n} \leqslant a_m + a_n \ \ (m, n \in \mathbb{N}).$$

Докажите, что тогда последовательность $\left\{\dfrac{a_n}{n}\right\}$ должна либо сходится, либо расходится к минус бесконечности. Причём предел этой последовательности будет равен её нижней грани.

7.20. $\star$ Докажите, что сумма $k-$ых степеней:

$$S_k(n) \ = \ 1^k + 2^k + \ldots + n^k \ = \ a_0 + a_1 n + \ldots + a_{k+1} n^{k+1} \ -$$

есть многочлен от n степени $(k+1)$. Установите равенство: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{S_k(n)}{n^{k+1}} = \dfrac{1}{k+1}$.

7.21. $\star$ Существует ли число $a > 1$ такое, что $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sin\big(a^n\big) = 1$?

7.22. $\star$ Пусть последовательность вещественных чисел $\{x_n\}$ такова, что выполнено:

$$\lim_{n\to\infty}\big(x_{n+1} - x_n\big) = 0.$$

Докажите, что промежуток с концами $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$ и $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$ является множеством её частичных пределов.

Вычисление пределов последовательности

Утверждения:

1. Сходящаяся числовая последовательность не может иметь более одной предельной точки;

2. Пусть $\{x_{k_n}\}$ - подпоследовательность последовательности $\{x_n\}$. Тогда,

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n \leqslant \varliminf_{n\to\infty} x_{k_n} \quad \Big(\varlimsup_{n\to\infty} x_n \geqslant \varlimsup_{n\to\infty} x_{k_n}\Big);$$

3. Если $\exists \varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$ $(\exists \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n)$, то найдется такая подпоследовательность $\{x_{k_n}\}$, что:

$$\lim_{n\to\infty} x_{k_n} = \varliminf_{n\to\infty} x_n \quad (\lim_{n\to\infty} x_{k_n} = \varlimsup_{n\to\infty} x_n);$$

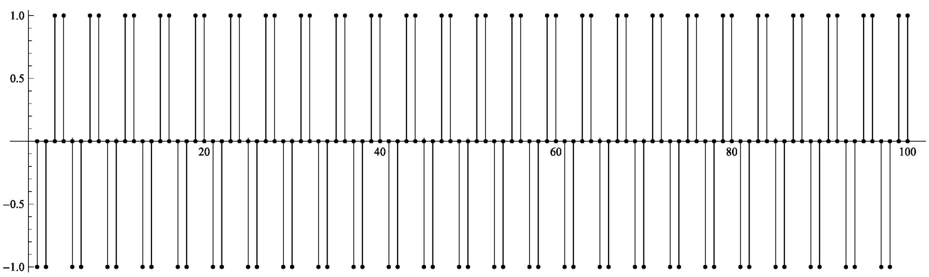
4. $\varliminf\limits_{n\to\infty}(-x_n) = -\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$;

5. $\dfrac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n} = \varliminf\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{x_n}$, $\;x_n \neq 0$ для $\forall n$.

8.1. *(131)* Пусть $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ - произвольные последовательности. Докажите, что:

(a) • $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n + \varliminf\limits_{n\to\infty} y_n \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} x_n + \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n$,

постройте примеры, на которых достигаются строгие неравенства;



Замечание: Отметим, что последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ могут расходится. В сходящихся последовательностях вместо неравенств достигаются равенства.

(б) $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n + \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n \leqslant \varlimsup\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) \leqslant \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n + \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n$,

постройте примеры, на которых достигаются строгие неравенства;

8.2. • *(аналог задачи **7.7.(а)** для произведения)*

Пусть $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \neq 0$, и $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot y_n$. Докажите, что последовательность $\{y_n\}$ сходится. Показать, что, если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, то из сходимости последовательности $\{x_n \cdot y_n\}$ может не вытекать сходимость последовательности $\{y_n\}$;

Замечание: В названии под "аналогом задачи" имеется ввиду, какие дополнительные условия требуется наложить на сходимость последовательности $\{x_n\}$, чтобы из сходимости ещё и $\{x_n \cdot y_n\}$ вытекала сходимость последовательности $\{y_n\}$.

8.3. *(132)* Пусть $x_n \geqslant 0, \quad y_n \geqslant 0$ для $\forall n \in \mathbb{N}$. Докажите, что:

(а) $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \varliminf\limits_{n\to\infty} y_n \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n,$

(б) $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n \leqslant \varlimsup\limits_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) \leqslant \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n,$

постройте примеры, когда в этих соотношениях имеют место строгие неравенства;

8.4. *(133)* Докажите, что если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, то какова бы ни была последовательность $\{y_n\}$ имеем:

(а) • $\varlimsup\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n;$

(б) $\varlimsup\limits_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n, \quad x_n \geqslant 0.$

8.5. *(134)* Докажите, что если для некоторой последовательности $\{x_n\}$, какова бы ни была последовательность $\{y_n\}$ имеет место тождество $\mathfrak{A}$, то последовательность $\{x_n\}$ сходится.

(а) • $\mathfrak{A}$: $\varlimsup\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n + \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n;$

(б) $\mathfrak{A}$: $\varlimsup\limits_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n, \quad (x_n \geqslant 0);$

8.6. *(135)* Докажите, что если $x_n > 0$ для $\forall n \in \mathbb{N}$ и $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \varlimsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{x_n} = 1$, то последовательность $\{x_n\}$ сходится.

8.7. • Составим для последовательности $\{a_n\}$, последовательность её средних арифметических $b_n = \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$. Докажите, используя только лишь определение предела последовательности, что если $\{a_n\}$ сходится, то и $\{b_n\}$ сходится к тому же пределу.

8.8. $\star$ Усильте утверждение из предыдущего номера, доказав, что

$$\varliminf_{n\to\infty} a_n \leqslant \varliminf_{n\to\infty} b_n \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} b_n \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} a_n.$$

8.9. $\star$ Пусть $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, \ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ н последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ определяются следующими соотношениями:

$$x_0 = 1; \quad a_n = 2x_n + y_n, \quad b_n = x_{n-1} + 2y_n, \quad n \geqslant 1.$$

Докажите сходимость последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, а также найдите их пределы.

8.10. $\star$ Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a, \quad \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Найдите предел последовательности

$$z_n = \frac{x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + \ldots + x_n y_1}{n}.$$

8.11. *(138,139,140)* Примените теорему Тёплица (см. в конце листочка) для решения следующих задач:

(а) • пусть последовательность $\{x_n\}$ сходится. Докажите, что последовательность средних арифметических $\xi_n = \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$ также сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \xi_n$. Постройте пример, что обратное не верно.

(б) пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = +\infty$.

(в) докажите, что если последовательность $\{x_n\}$ сходится и $x_n > 0$ для $\forall n \in \mathbb{N}$, то последовательность средних геометрических сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

(г) пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Найдите предел $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n \cdot x_1 + (n-1) \cdot x_2 + \ldots + 1 \cdot x_n}{n^2}$.

8.12. *(141)* Докажите, что если $x_n > 0$ для $\forall n \in \mathbb{N}$, и $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{x_{n-1}}$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{x_{n-1}}$.

8.13. *(142)* Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$.

8.14. ⋆ Докажите, что $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \left(\dfrac{x_1 + x_{n+1}}{x_n}\right)^n \geqslant e$ для любой положительной последовательности $\{x_n\}$.

8.15. ⋆ Последовательности чисел $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ удовлетворяют следующим условиям:

(1) $a_n \neq 0 \ \ \forall n \geqslant 1$;

(2) $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \to +\infty, \ \ n \to \infty$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b_n}{a_n} = d < \infty$.

(4) $\exists C \in \mathbb{R} : \forall n \geqslant 1 \ \ \dfrac{|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n} < C$;

Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n} = d$.

8.16. ⋆ Пусть $0 < a_n < 1$ при $n \in \mathbb{N}$.

(а) Покажите на примерах, что существование одного из пределов $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1 + \ldots + a_n}{n}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1^2 + \ldots + a_n^2}{n}$ не связано с существованием другого.

(б) Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1 + \ldots + a_n}{n} = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1^2 + \ldots + a_n^2}{n} = b$. Докажите, что $a^2 \leqslant b \leqslant a$ и что переменная b может принимать *любые* значения между a^2 и a.

Теорема Тёплица о регулярном преобразовании последовательности

Рассмотрим последовательность A_{nm}, зависящую от двух индексов, удовлетворяющую условиям:

1. $A_{nm} \geqslant 0$, для всех $n, m \in \mathbb{N}$;

2. $A_{n1} + \ldots + A_{nn} = 1$;

3. $\lim\limits_{n\to\infty} A_{nm} = 0$ для любого фиксированного $m \in \mathbb{N}$,

а также числовую последовательность $\{\widetilde{x}_n\}$, такую, что

4. $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \widetilde{x}_n = a < \infty$.

Тогда последовательность $S_n = \sum\limits_{m=1}^{n} A_{nm}\widetilde{x}_m$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = a$.

► Для $\forall \varepsilon > 0$ рассмотрим, при достаточно больших n, модуль разности:

$$\left|\sum_{m=1}^{n} A_{nm}\widetilde{x}_m - a\right| = \left\{\sum_{m=1}^{n} A_{nm} = 1\right\} = \left|\sum_{m=1}^{n} A_{nm}(\widetilde{x}_m - a)\right| \leqslant \sum_{m=1}^{n} A_{nm}|\widetilde{x}_m - a| \qquad (*)$$

Получение оценок из условий 3 и 4:

$\exists \lim\limits_{n\to\infty} \widetilde{x}_n = a \Leftrightarrow$ для $\forall \varepsilon > 0$, которое было выбрано выше, $\exists N_x(\varepsilon)$:

$$\forall n > N_x(\varepsilon) \quad |\widetilde{x}_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (1)$$

Далее, т.к. $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \widetilde{x}_n = a < \infty$, то $\{\widetilde{x}_n\}$ - ограничена, т.е. $\exists M \geqslant |a| \geqslant 0$ такое, что $|\widetilde{x}_n| \leqslant M$, а

$$|\widetilde{x}_n - a| \leqslant |\widetilde{x}_n| + |a| \leqslant 2M, \text{ для } \forall n \in \mathbb{N} \qquad (2)$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} A_{nm} = 0$ и $A_{nm} \geqslant 0$, то для фиксированного нами $\varepsilon > 0$ $\exists N_A(\varepsilon) \geqslant N_x(\varepsilon)$, что

$$0 \leqslant A_{nm} < \frac{\varepsilon}{4N_x M} \qquad (3)$$

для $\forall m = 1, \ldots, N_x$ и $\forall n > N_A$.

Продолжаем оценивать выражение $(*)$, используя неравенства (1)-(3).

Пусть $n \geqslant N_A(\varepsilon)$ тогда

$$\sum_{m=1}^{n} A_{nm}|\widetilde{x}_m - a| = A_{n1}|\widetilde{x}_1 - a| + \ldots + A_{nN_x}|\widetilde{x}_{N_x} - a| + A_{nN_x+1}|\widetilde{x}_{N_x+1} - a| + \ldots + A_{nn}|\widetilde{x} - a| <$$

$$< N_x \frac{\varepsilon}{4N_x M} \cdot 2M + \frac{\varepsilon}{2}\left(A_{nN_x+1} + \ldots + A_{nn}\right) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

. ■

Замечание: Если условие 1. $A_{nm} \geqslant 0$, для $\forall n, m \in \mathbb{N}$ не выполнено, то для справедливости теоремы Тёплица необходимо добавить условие: $\exists C > 0$, что для $\forall n \geqslant 1$ следует $\sum\limits_{m=1}^{n} |A_{nm}| \leqslant C$.